

BAHAN AJAR 3.1

Kompetensi Dasar : 3.1.Menerapkan konsep bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma dalam menyelesaikan masalah
4.1.Menyajikan penyelesaian masalah bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma

Tujuan Pembelajaran :

Setelah proses pembelajaran peserta didik diharapkan dapat :

3.1.1. Menjelaskan konsep bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma dalam menyelesaikan masalah (4 jp)

3.1.2. Mengoperasikan konsep bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma dalam menyelesaikan masalah (4 jp)

4.1.1. Mengoperasikan penyelesaian masalah bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma (2 JP)

4.1.2. Menyajikan penyelesaian masalah bilangan berpangkat, bentuk akar dan logaritma (2 JP)

A. Bilangan Berpangkat

1. Konsep bilangan pangkat bulat positif

Untuk a bilangan real dan a bilangan bulat positif, dan $a \neq 0$, $b \neq 0$ berlaku :

a. $a^b = a \times a \times a \times \dots \times a$, dengan a (bilangan real) disebut bilangan pokok, dan b disebut eksponen atau pangkat.

Example 1:

1) $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243}$

b. Untuk a, m , dan $n \in \text{Real}$, maka perkalian bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0, b \neq 0$

Example 2:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} = \frac{1^2+3}{3} = \frac{1^5}{3} = \frac{1}{243}$

2) $10 \times 10^6 = 10^{1+6} = 10^7$

3) $r^2 \times r^3 \times r = r^{2+3+1} = r^6$

c. Untuk a, m , dan $n \in \text{Real}$, maka pembagian bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut : $a^m : a^n = a^{m-n}$ atau $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0, b \neq 0$

Example 3:

1) $5^3 : 5^{-1} = 5^{3-(-1)} = 5^4$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{4-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$

3) $\frac{a^7 b^5}{a^5 b^2} = a^{7-5} b^{5-2} = a^2 b^3$

d. Untuk a, m , dan $n \in \text{Real}$, maka pemangkatan bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a \neq 0, b \neq 0$

Example 4:

1) $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 5^2$

$$2) 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3$$

$$3) (x^2)^3 = x^2 \cdot 3 = x^6$$

$$4) (3x^2y)^2 = 3^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 = 9x^4y^2$$

$$5) \left(\frac{a^7b^5}{a^5b^2}\right)^2 = (a^{7-5}b^{5-2})^2 = (a^2b^3)^2 = a^4b^6$$

e. Untuk a, m , dan $n \in \text{Real}$, maka perpangkatan dari perkalian dua atau lebih bilangan dapat dinyatakan sebagai berikut : $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, a \neq 0, b \neq 0$

Example 5 :

$$1) (3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$2) (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$$

$$3) \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4}{\left(\frac{7}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{12}{7}\right)^3} = \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^4}{\left(\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{7}\right)^3} = \frac{\left(\frac{12}{6}\right)^4}{\left(\frac{84}{42}\right)^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2$$

f. Untuk a, m , dan $n \in \text{Real}$, maka perpangkatan dari perkalian dua atau lebih bilangan dapat dinyatakan sebagai berikut : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, a \neq 0, b \neq 0$

Example 6 :

$$1) 100^4 : 50^4 = (100:50)^4 = 2^4 = 16$$

$$2) \left(\frac{a \cdot b^2}{c^5 \cdot d^2}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot b^4}{c^{10} \cdot d^4}$$

2. Bilangan pangkat bulat positif

Untuk $a \in \text{Real}$ dan $m \in \text{Real}$, maka pangkat bilangan negatif dapat dinyatakan sebagai berikut : $a^0 = 1, a \neq 0$

Example 7 :

$$10^4 : 10^4 = 10^{4-4} = 10^0 = 1$$

3. Bilangan pangkat bulat negatif

Untuk $a \in \text{Real}$ dan $m \in \text{Real}$, maka pangkat bilangan negatif dapat dinyatakan sebagai berikut : $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$

Example 8 :

$$1) 5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

$$2) 10 : 10^6 = 10^{1-6} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000}$$

$$3) \frac{2a^3 \cdot b^{-5} \cdot c^2}{6a^9 \cdot b^2 \cdot c^{-1}} = \frac{2a^{3-9} \cdot b^{-5-2} \cdot c^{2-(-1)}}{6} = \frac{a^{-6} \cdot b^{-7} \cdot c^3}{3} = \frac{c^3}{3a^6 b^7}$$

QUIZ 1.1

1. ...
2. ..

B. Bentuk Akar

1. Definisi Bentuk Akar

Bilangan-bilangan $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ merupakan bentuk akar. Secara umum bentuk akar ditulis $x = \sqrt[n]{a}$, yaitu akar dari sebuah persamaan dengan rumus $x^n = a$, dengan n bilangan bulat positif, a bilangan rasional, x bilangan real.

Example 8 :

Manakah di antara bilangan berikut yang merupakan bentuk akar?

- 1) $\sqrt{25}$ 2) $\sqrt{\pi}$ 3) $\sqrt[3]{8}$ 4) $2 + \sqrt{7}$ 5) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

2. Jenis-jenis Bentuk Akar

Bentuk akar ada beberapa jenis, diantaranya adalah :

- Bentuk akar murni adalah bentuk akar yang hanya terdiri atas bilangan irasional, contohnya $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[5]{2}$
- Bentuk akar campuran adalah bentuk akar yang merupakan hasil perkalian antara bilangan rasional dan bilangan irasional, contohnya :
 - $3\sqrt{2}$ adalah bentuk akar campuran karena merupakan hasil kali dari bilangan rasional 3 dan bentuk akar $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{8}$ merupakan bentuk akar campuran, karena dapat ditulis sebagai $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$
 - $\sqrt{50}$ merupakan bentuk akar campuran, karena dapat ditulis sebagai $\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$
- Bentuk akar kuadrat adalah bentuk akar berpangkat 2, contohnya $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, dan $\sqrt{15}$
- Bentuk akar kubik adalah bentuk akar berpangkat 3, contohnya $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, dan $\sqrt[3]{25}$
- Bentuk akar bikuadratik adalah bentuk akar berpangkat 4, contohnya $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[4]{10}$, dan $\sqrt[4]{35}$
- Bentuk akar monomial adalah bentuk akar yang terdiri satu-satu, contohnya $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{9}$
- Bentuk akar binomial adalah bentuk akar yang terdiri atas dua bentuk akar, contohnya $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$
- Bentuk akar trinomial adalah bentuk akar yang terdiri atas tiga bentuk akar, contohnya $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$, $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt{5})$

3. Sifat-sifat Bentuk Akar

Karena bentuk akar dapat dinyatakan sebagai pangkat pecahan, maka sifat-sifat pangkat dapat diterapkan pada bentuk akar.

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ atau $x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ atau $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt{mn}\sqrt{x} = \sqrt[n]{m}\sqrt{x}$ atau $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ atau $(x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

Dengan x, y adalah bilangan rasional, dan m, n adalah bilangan bulat positif.

Example 9 :

Sederhanakan bentuk-bentuk akar berikut :

- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
- $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$3) \sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[5]{4^{\frac{1}{3}}} = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{4}$$

$$4) \sqrt[5]{2^3} = (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$$

4. Operasi Dasar Bentuk Akar

Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Bentuk akar adalah bilangan real, karena itu kita dapat menggunakan sifat distributif untuk menggabungkan akar-akar sejenis dalam penjumlahan atau pengurangan.

Bentuk akar yang sejenis merupakan faktor bilangan irasional yang sama disebut bentuk akar

sejenis. Contohnya : $6\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$.

Example 10 :

Sederhanakan operasi bilangan berikut :

$$1) 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \qquad 4) 2\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{500}$$

$$2) 3\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5\sqrt{6} \qquad 5) \sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 7\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$3) \sqrt{20} - \sqrt{500} + \sqrt{320}$$

Penyelesaian :

$$1) 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 + 2)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$2) 3\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5\sqrt{6} = (3 + 1 - 5)\sqrt{6}$$

$$3) \sqrt{20} - \sqrt{500} + \sqrt{320} = 2\sqrt{5} - 10\sqrt{5} + 8\sqrt{5} \\ = (2 - 10 + 8)\sqrt{5} = 0$$

$$4) 2\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{500} = 2\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} - \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \\ = 2\sqrt[3]{4} + 7 \cdot 2\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} \\ = 2\sqrt[3]{4} + 14\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{4} \\ = (2 + 14 - 5)\sqrt[3]{4} = 11\sqrt[3]{4}$$

$$5) \sqrt{147} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 7\sqrt{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 7} - \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}} + 7\sqrt{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}} \\ = 3 \cdot 7\sqrt{3} - \frac{7}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ = 21\sqrt{3} - \frac{7}{9}\sqrt{3} + \frac{7}{3}\sqrt{3} \\ = \left(21 - \frac{7}{9} + \frac{7}{3}\right)\sqrt{3} \\ = \left(\frac{189 - 7 + 21}{9}\right)\sqrt{3} = \frac{203}{9}\sqrt{3}$$

QUIZ 2.1

Sederhanakan bentuk penjumlahan dan pengurangan berikut

$$1. 12\sqrt{6} - 7\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$

$$2. \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$$

$$3. \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} + 5\sqrt[3]{64}$$

Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

➤ Perkalian bilangan real dengan bentuk akar, gunakan aturan sebagai berikut :

$$a \cdot b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$$

Example 11 :

Hitung dan sederhanakan bentuk akar di bawah ini

- 1) $6 \cdot 3\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$
- 2) $2 \cdot \sqrt{242} = 2 \cdot \sqrt{121 \cdot 2} = 2 \cdot 11\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$
- 3) $3 \cdot (4\sqrt{2} + \sqrt{162}) = 12\sqrt{2} + 3\sqrt{162} = 12\sqrt{2} + 3 \cdot 9\sqrt{2} = 39\sqrt{2}$

➤ Perkalian bentuk akar dengan bentuk akar, gunakan aturan sebagai berikut :

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{atau} \quad c\sqrt{d} \cdot e\sqrt{f} = c \cdot e\sqrt{d \cdot f}$$

Example 12 :

Hitung dan sederhanakan bentuk akar di bawah ini

- 1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{7 \cdot 6} = \sqrt{42}$
- 2) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{12} = 6\sqrt{24} = 6 \cdot 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$
- 3) $2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = (2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}) + (2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3})$
 $= 2\sqrt{12} + 10\sqrt{18}$
 $= 2 \cdot 2\sqrt{3} + 10 \cdot 3\sqrt{2} = 4\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$
- 4) $(\sqrt{8} + \sqrt{5})(\sqrt{8} - \sqrt{5}) = (\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}) + (\sqrt{8} \cdot (-\sqrt{5})) + (\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}) + (\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}))$
 $= 8 + (-\sqrt{40}) + (\sqrt{40}) + (-5)$
 $= 8 - 5 = 3$

Catatan: dari contoh no 4) ini dapat di tulis : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

$$5) 5\sqrt[3]{49} \cdot 2\sqrt[3]{14} = (5 \cdot 2) \sqrt[3]{49 \cdot 14} = 10\sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2} = 10 \cdot 7\sqrt[3]{2} = 70\sqrt[3]{2}$$

$$6) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$$

KPK dari 2, 3, dan 4 adalah 12. Maka, $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$; dan $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} &= \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{4^3} \\ &= \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^6} \\ &= \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^4} = 2\sqrt[12]{3^4} = 2(3)^{\frac{4}{12}} = 2(3)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Catatan : Bentuk akar berpangkat sama dapat dikalikan sesuai dengan sifat berikut :

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

QUIZ 3.1

Sederhanakan bentuk perkalian berikut

1. $4\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{28}$
2. $5(3\sqrt{5} + \sqrt{50})$
3. $(\sqrt{28} - \sqrt{12})(2\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$
4. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{22}$

➤ *Pembagian Bentuk Akar*

Penyederhanakan pembagian bentuk akar sering disebut dengan merasionalkan penyebut bentuk pecahan. Untuk merasionalkan penyebut bentuk pecahan, bilangan tersebut dikalikan dengan sekawan bentuk pecahan dari penyebut. Perhatikan rasionalisasi bentuk-bentuk di bawah ini :

(i) Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

(ii) Bentuk $\frac{k}{a+\sqrt{b}}$

$$\frac{k}{a+\sqrt{b}} = \frac{k}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{k(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$

(iii) Bentuk $\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{k(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Example 13 :

Sederhanakan bentuk-bentuk berikut :

1) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

2) $\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{10} = \sqrt{5}$

3) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{50}}{10} = \frac{2 \cdot 5\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$

4) $\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{-2} = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$

5) $\frac{8}{5-\sqrt{17}} = \frac{8}{5-\sqrt{17}} \cdot \frac{5+\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}} = \frac{8(5+\sqrt{17})}{25-17} = \frac{8(5+\sqrt{17})}{8} = 5+\sqrt{17}$

6) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{10}+\sqrt{6}$

7) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 3-2\sqrt{6}+2$

QUIZ 4.1

Sederhanakan bentuk pembagian berikut

1. $\frac{2}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

3. $\frac{2-4\sqrt{7}}{\sqrt{5}+2}$

4. $\frac{-5}{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$

5. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+2\sqrt{5}}$

C. Logaritma

1. Konsep Logaritma

Logaritma merupakan invers dari eksponen. Sehingga demikian jika $a^x = b$, dengan b adalah bilangan positif ($b > 0$) dan a adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 ($a \neq 0$), maka x adalah logaritma dari b dengan bilangan pokok a atau ditulis $x = {}^a\log b$. Bilangan disebut numerus, dan x adalah hasil logaritma.

Perhatikan contoh berikut untuk memahami cara mengubah bilangan berpangkat ke dalam bentuk logaritma

Example 14

1) Ubahlah bentuk pangkat berikut ini menjadi bentuk logaritma

a. $2^5 = 32 \Rightarrow {}^2\log 32 = 5$

b. $4^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow {}^4\log \frac{1}{16} = -2$

2) Tentukan nilai logaritma berikut

a. ${}^3\log 27 \Rightarrow$ misalkan: ${}^3\log 27 = x$, maka $3^x = 27$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

b. ${}^5\log 625 \Rightarrow$ misalkan: ${}^5\log 625 = x$, maka $5^x = 625$

$$5^x = 5^4$$

$$x = 4$$

2. Sifat-Sifat Logaritma

Dengan menggunakan sifat-sifat logaritma, bentuk-bentuk perhitungan logaritma yang sulit akan menjadi relatif lebih mudah untuk diselesaikan. Berikut sifat-sifat logaritma di bawah ini berlaku syarat $p > 0$ dan $p \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, dan $m, n \in \mathbf{R}$.

Sifat 1

Untuk $a > 0$ dan $a \neq 0$, berlaku :

$${}^a\log a = 1, \quad {}^a\log 1 = 0, \quad \text{dan} \quad \log 10 = 1$$

Bukti :

✓ Setiap bilangan apabila dipangkatkan dengan 1 hasilnya adalah bilangan itu sendiri. Jadi,

$$a^1 = a \Leftrightarrow {}^a\log a = 1$$

✓ Setiap bilangan tidak sama dengan nol apabila dipangkatkan nol hasilnya selalu satu. Jadi,

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow {}^a\log 1 = 0$$

✓ Log 10 adalah suatu bentuk logaritma dengan basis 10 dan numerusnya 10. Jadi, $\log 10 = 1$

Sifat 2

Untuk $a > 0$, $a \neq 0$, $x > 0$, dan $y > 0$ serta a, x , dan $y \in \mathbf{R}$ berlaku :

$${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$$

Bukti :

$${}^a\log x = n \Leftrightarrow a^n = x$$

$${}^a\log y = m \Leftrightarrow a^m = y$$

$${}^a\log xy = p \Leftrightarrow a^p = xy$$

Dari betuk pangkat tersebut diperoleh

$$xy = a^n a^m \Leftrightarrow xy = a^{n+m}$$

$$a^p = a^{n+m} \Leftrightarrow p = n + m$$

Maka : $n = {}^a\log x$, $m = {}^a\log y$, dan $p = {}^a\log xy$

Example 15

Tentukan nilai dari ${}^2\log 3 + {}^2\log 8 - {}^2\log 6$

Penyelesaian : ${}^2\log 3 + {}^2\log 8 - {}^2\log 6 = {}^2\log \frac{3 \cdot 8}{6}$ (menggunakan sifat 2 & 3)

$$= {}^2\log 4 = {}^2\log 2^2 = 2 \cdot {}^2\log 2 = 2$$

Sifat 3

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, dan $y > 0$ serta a , x , dan $y \in \mathbb{R}$ berlaku :

$${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$$

Bukti :

$${}^a\log x = n \Leftrightarrow a^n = x$$

$${}^a\log y = m \Leftrightarrow a^m = y$$

$${}^a\log \frac{x}{y} = p \Leftrightarrow a^p = \frac{x}{y}$$

Dari betuk pangkat tersebut diperoleh

$$\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^m} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = a^{n-m}$$

$$\Leftrightarrow a^p = a^{n-m}$$

$$\Leftrightarrow p = n - m$$

Jadi, ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$

Example 16

Tentukan nilai dari ${}^2\log 48 + {}^2\log 50 - {}^2\log 3 - {}^2\log 2$

Penyelesaian : ${}^2\log 48 + {}^2\log 50 - {}^2\log 3 - {}^2\log 2$

$$= {}^2\log \frac{48}{3} + {}^2\log \frac{50}{2}$$

$$= {}^2\log 16 + {}^2\log 25 = 4 + 2 = 6$$

Sifat 4

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, a , n , dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku : ${}^a\log x^n = n \cdot {}^a\log x$

Bukti :

$${}^a\log x^n = {}^a\log(x \cdot x \cdot x \dots x)$$

$$= {}^a\log x + {}^a\log x + {}^a\log x + \dots + {}^a\log x$$

$$= n {}^a\log x$$

Jadi, ${}^a\log x^n = n \cdot {}^a\log x$

Sifat 5

Untuk $a, m > 0$, a, m, n , dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku : $a^m \log x^n = \frac{n^a}{m} \log x$

Bukti :

$${}^a \log x = p \Leftrightarrow a^p = x$$

$$a^m \log x^n = q \Leftrightarrow a^{m \cdot q} = x^n$$

Dari bentuk pangkat di atas diperoleh :

$$x^n = a^{m \cdot q} \quad \Leftrightarrow (a^p)^n = a^{mq}$$

$$a^{pn} = a^{mq} \quad \Leftrightarrow np = mq$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{n}{m} p$$

Jadi, $a^m \log x^n = \frac{n^a}{m} \log x$

Example 16

Tentukan nilai x dari $\log x = \frac{1}{3} \log 8 + \log 9 - \frac{1}{3} \log 27$

$$\text{Penyelesaian : } \log x = \frac{1}{3} \log 8 + \log 9 - \frac{1}{3} \log 27$$

$$= \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 9 - \log 27^{\frac{1}{3}} \quad (\text{sifat ke-4})$$

$$= \log(2^3)^{\frac{1}{3}} + \log 9 - \log(3^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log 2 + \log 9 - \log 3$$

$$= \log \frac{2 \cdot 9}{3} = \log 6$$

$$\text{Jadi, } \log x = \log 6$$

$$x = 6$$

Sifat 6

Untuk $a, p > 0$, dan $a, p \neq 1$, serta a, p , dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku : ${}^a \log x = \frac{p \log x}{p \log a} = \frac{1}{x \log a}$

Bukti :

$${}^a \log x = n \Leftrightarrow x = a^n$$

$$\log x = \log a^n$$

$$\Leftrightarrow \log x = n \cdot \log a$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{p \log x}{p \log a}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log x = \frac{p \log x}{p \log a}$$

Jika, $p = x$ maka :

$${}^a \log x = \frac{x \log x}{x \log a}$$

$${}^a \log x = \frac{1}{x \log a}$$

Sifat 7

Untuk $a > 0, x > 0, y > 0, a, x,$ dan $y \in \mathbb{R}$ berlaku : ${}^a\log x \cdot {}^x\log y = {}^a\log y$

Bukti :

$${}^a\log x = p \Leftrightarrow a^p = x$$

$${}^x\log y = q \Leftrightarrow x^q = y$$

Dari bentuk perpangkatan tsb diperoleh

$$y = x^q \Leftrightarrow y = (a^p)^q$$

$$\Leftrightarrow y = a^{pq}$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log y = {}^a\log a^{pq}$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log y = pq \cdot {}^a\log a$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log y = pq$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log y = {}^a\log x \cdot {}^x\log y$$

Sifat 8

Untuk $a > 0, a,$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku : $a^{{}^a\log x} = x$

Bukti :

$${}^a\log x = n \Leftrightarrow a^n = x$$

$$x = a^n \Leftrightarrow x = a^{{}^a\log x}$$

Jadi, $a^{{}^a\log x} = x$

Sifat 9

Untuk $a > 0, a,$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku : $a^{n^{{}^a\log x}} = x^n$

Bukti :

$$n^{{}^a\log x} = p \Leftrightarrow {}^a\log x^n = p$$

$$x^n = a^p$$

$$x^n = a^{n^{{}^a\log x}}$$

Jadi, $a^{n^{{}^a\log x}} = x^n$

Example 17 :

1) Jika diketahui ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^3\log 5 = b$, nyatakan ${}^{12}\log 30$ dalam a dan b

$$\begin{aligned} \text{Penyelesaian : } \quad {}^{12}\log 30 &= \frac{{}^3\log 30}{{}^3\log 12} \quad (\text{sifat 6}) \\ &= \frac{{}^3\log(5 \cdot 6)}{{}^3\log(4 \cdot 3)} \\ &= \frac{{}^3\log 5 + {}^3\log 6}{{}^3\log 4 + {}^3\log 3} \quad (\text{sifat 2}) \\ &= \frac{{}^3\log 5 + {}^3\log 2 + {}^3\log 3}{2 \cdot {}^3\log 2 + {}^3\log 3} \\ &= \frac{b + \frac{1}{a} + 1}{2\left(\frac{1}{a}\right) + 1} = \frac{ab + 1 + a}{\frac{2+a}{a}} \\ &= \frac{ab + 1 + a}{2+a} \text{ atau } \frac{1+a+ab}{2+a} \text{ atau } \frac{a+ab+1}{a+2} \end{aligned}$$

2) Sederhanakan bentuk logaritma berikut

a. ${}^2\log 25 \times {}^3\log 8 \times {}^5\log 9$

b. $2 \cdot {}^2\log 7 - 9 \cdot {}^3\log 2 + 5 \cdot {}^{25}\log 4$

Penyelesaian

a. ${}^2\log 25 \times {}^3\log 8 \times {}^5\log 9 = {}^2\log 5^2 \times {}^3\log 2^3 \times {}^5\log 3^2$
 $= 2 \cdot {}^2\log 5 \times 3 \cdot {}^3\log 2 \times 2 \cdot {}^5\log 3$
 $= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot {}^2\log 5 \times {}^3\log 2 \times {}^5\log 3$

b. $2 \cdot {}^2\log 7 - 9 \cdot {}^3\log 2 + 5 \cdot {}^{25}\log 4 = 7 - (3^2) \cdot {}^3\log 2 + 5 \cdot {}^{5^2}\log 2^2$
 $= 7 - 2^2 + 5 \cdot {}^{2^5}\log 2$ (sifat 8 dan 9)
 $= 7 - 4 + 5 \cdot {}^5\log 2$ (sifat 8)
 $= 7 - 4 + 2$
 $= 5$

QUIZ 5.1

1. Nyatakan bentuk pangkat berikut ke dalam bentuk logaritma.

a. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

d. $\sqrt{3^{5p}} = 3^{\frac{5p}{2}}$

b. $2^{2q} = \frac{1}{4}$

e. $4^{x+1} = 8$

c. $a^{m+n} = x$

2. Nyatakan bentuk logaritma berikut ke dalam bentuk pangkat.

a. ${}^2\log \frac{1}{32} = -5$

d. $\sqrt{2} \log a^2 = 4$

b. ${}^3\log x = \frac{1}{2}$

e. $4 \cdot {}^3\log r = 24$

c. ${}^5\log (2p+1) = q$

3. Tentukan nilai x dari logaritma berikut.

a. ${}^2\log (2x - 6) = 3$

b. ${}^3\log x^2 = 2$

c. ${}^5\log (x^2 - 2x + 22) = 2$

4. Sederhanakan bentuk logaritma berikut.

a. ${}^{12}\log 3 + {}^{12}\log 4$

b. ${}^3\log 16 + {}^3\log 5 - {}^3\log 4$

c. ${}^4\log 200 - {}^4\log 25$

d. $\frac{1}{3}\log 7^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\log \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\log \frac{25}{36}$

e. ${}^3\log \left(\frac{1}{243} \right) + \sqrt{5} \log 125 - {}^{81}\log 3 - {}^{16}\log \frac{1}{2}$

5. Sederhanakan bentuk logaritma berikut.

a. ${}^5\log 4 \times {}^2\log 3 \times {}^9\log 5$

b. ${}^6\log \frac{1}{27} \times {}^4\log 36 \times {}^3\log 8$

c. $5 \cdot {}^5\log 10 + 4 \cdot {}^2\log 3 + 27 \cdot {}^3\log 2$

d. $9 \cdot {}^3\log 2 + 16 \cdot {}^4\log 2 - \frac{5 \cdot {}^5\log 3}{3 \cdot {}^3\log \frac{1}{2}}$

6. Jika $a = {}^5\log 1$; $b = {}^{10}\log 0,01$; $c = {}^5\log 0,2$;
 $d = \frac{1}{2} \log 8$.

Tentukan nilai dari $\frac{a - (b + c)^2}{d}$.

7. Jika ${}^2\log (2x - 1) = 4$; ${}^y\log 0,125 = -3$;
 $\sqrt{z} \log z = 2$, tentukan nilai dari $x \cdot y \cdot z$.

8. Jika $\log 2 = x$ dan $\log 3 = y$, tentukan nilai dari ${}^5\log 24$.

9. Jika ${}^5\log 3 = a$ dan ${}^3\log 4 = b$, tentukan nilai dari ${}^{12}\log 75$.

10. Jika ${}^2\log 3 = a$, tentukan nilai dari nilai dari

$${}^3\log 4 + \sqrt{27} \log \sqrt{2} + \frac{1}{{}^3\log \frac{1}{4}}$$